

不确定双圆盘转子系统振动响应分析

刘彦旭^{1,2}, 刘保国^{1,2}, 冯伟^{1,2}, 程敏^{1,2}

(1. 河南工业大学 机电工程学院, 郑州 450001;

2. 河南工业大学 河南省超硬磨料磨削装备重点实验室, 郑州 450001)

摘 要: 采用基于随机矩阵最大熵法的非参数方法对不确定性转子系统进行动力学建模,研究了模型不确定性与参数不确定性对不确定双圆盘转子系统固有频率波动的影响,分析了转子系统振动响应在不同转速范围内对模型不确定性与参数不确定性的敏感度,从而将一般参数建模方法所无法考虑的建模误差考虑在内。结果表明:模型与参数不确定性对系统固有频率波动的影响大小不同,转轴弹性模量变异系数为0.04时分别使1阶固有频率产生了1.19%与3.58%的波动,2阶固有频率产生了1.82%与3.64%的波动;支承刚度变异系数为0.04时分别使1阶固有频率产生了0.01%与6.17%的波动,2阶固有频率产生了0.68%与6.18%的波动。不同转速范围内,转子系统振动响应对两种不确定性的敏感度也不同:在低于120 rad/s与高于430 rad/s的范围内,系统响应对两种不确定性均不敏感;在120~200 rad/s以及270~430 rad/s范围内,模型不确定性比参数不确定性对响应波动的影响大。该研究成果能够为复杂转子系统随机响应的预测提供一定的理论参考。

关 键 词: 非参数方法; 模型不确定性; 参数不确定性; 转子系统; 振动响应

中图分类号: V233.1; TH113.1

文献标志码: A

Vibration responses analysis for double disks rotor system with uncertainties

LIU Yanxu^{1,2}, LIU Baoguo^{1,2}, FENG Wei^{1,2}, CHENG Min^{1,2}

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering,

Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China;

2. Henan Key Laboratory for Superabrasive Grinding Equipment,

Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: The nonparametric method based on the maximum entropy method of random matrix was used to model the dynamics of uncertain rotor system. The effects of model uncertainties and parametric uncertainties on the fluctuation of natural frequencies of an uncertain double disk rotor system were studied with nonparametric method. The sensitivity of vibration responses of this system to model uncertainties and parametric uncertainties in different speed ranges was studied. Thus, the modeling errors that cannot be considered by parametric methods were taken into account. The results showed that: the effects of model and parametric uncertainties on system natural frequency fluctuation were different. For varia-

收稿日期: 2020-07-12

基金项目: 国家自然科学基金 NSFC-河南联合基金项目(U1604254); 国家自然科学基金面上项目(12072106);

河南省高等学校重点科研项目(20A460007)

作者简介: 刘彦旭(1990—),男,博士生,主要从事转子动力学研究。E-mail:yanxuli2010@sina.com

通信作者: 刘保国(1962—),男,教授、博士生导师,博士,主要从事转子动力学、机械振动研究。E-mail:bagliu1978@sina.com

引用格式: 刘彦旭,刘保国,冯伟,等. 不确定双圆盘转子系统振动响应分析[J]. 航空动力学报, 2021, 36(3): 488-497. LIU Yanxu, LIU Baoguo, FENG Wei, et al. Vibration responses analysis for double disks rotor system with uncertainties[J]. Journal of Aerospace Power, 2021, 36(3): 488-497.

tion coefficient 0.04 of elastic modulus of rotating shaft, the first-order natural frequency had 1.19% and 3.58% fluctuation, and the second-order natural frequency fluctuated by 1.82% and 3.64%; for variation coefficient 0.04 of support stiffness, the first-order natural frequency had 0.01% and 6.17% fluctuations, and the second-order natural frequency fluctuated by 0.68% and 6.18%, respectively. The sensitivity of vibration responses of the rotor system to the two kinds of uncertainties was related to speed ranges: within the range of lower than 120 rad/s and upper than 430 rad/s, the system responses were not sensitive to the two kinds of uncertainties; within the range of 120—200 rad/s and 270—430 rad/s, the effects of model uncertainties on the response fluctuation were greater than those of parametric uncertainties. The research results can provide a theoretical reference for the prediction of random responses of complex rotor systems.

Key words: nonparametric method; model uncertainty; parametric uncertainty; rotor system; vibration response

在旋转机械尤其是航空发动机转子系统、发电机组励磁机转子的设计及其使用过程中,需要对转子系统的动力学特性进行分析,而转子系统在其加工及装配或维修等过程中,通常会产生一定程度的不确定性,这些不确定性将导致系统的质量、刚度及阻尼等结构特征参数产生一定的不确定性,从而使系统动力学特性及动力学响应具有一定的不确定性^[1-2]。不确定性的来源一般分为参数不确定性(由数据误差产生,如材料的实际弹性模量、密度及泊松比等可能存在一定的不确定性)及模型不确定性(由建模误差产生,如为了减少计算时间而将系统简化处理为集总化计算模型)^[3-5]。针对参数不确定的转子动力学问题,一般可采用某一个或某几个随机量来对系统的随机参数进行建模,进而研究系统的动力学特性^[6-7]。

国内外对参数不确定转子系统的研究较为普遍,但针对同时具有两种不确定性的转子系统的研究还较少^[8-10]。对于具有两种不确定性的转子动力学系统,可以利用随机矩阵法及最大熵理论进行研究^[11]。Murthy 等^[12]研究了两种不确定性同时作用于转子系统时进动频率的变化,但未进行进动频率对两种不确定性单独作用时的灵敏度分析。Gan 等^[13]采用非参数方法对转子进行建模,并进行了可靠性分析,但未讨论两种不确定性对可靠性的影响大小。因此,有必要在转子系统的动力学建模过程中将两种不确定性同时考虑进去,并分析这些不确定性对转子系统的影响。

本文通过最大熵随机矩阵法构建了双圆盘转子系统的非参数不确定性动力学模型,通过对其各阶固有频率进行计算并与参数模型进行对比,以期研究两种不确定性对固有频率波动的影响;

在考虑系统存在质量偏心及随机激励的情况下,进行了振动响应分析;最后分析了两种不确定性对振动响应波动的影响,这可以为以后对不确定性多转子系统振动特性的研究提供一种思路。

1 转子系统非参数不确定性动力学模型

1.1 最大熵随机矩阵构造方法

同时考虑两种不确定性的非参数概率方法的主要数学思想是用随机矩阵代替均值广义矩阵,随机矩阵可采用最大熵法进行构造^[14-19]。对于比较简单的转子系统动力学模型,可能将质量矩阵、刚度矩阵以及阻尼矩阵考虑为对称正定实矩阵,而反对称陀螺矩阵则可由与质量矩阵的关联通过计算而得到。因此,采用非参数方法对具有两种不确定性的转子系统进行振动分析的关键在于合理地构造随机对称正定实矩阵。根据最大熵原理,随机矩阵 $\mathbf{A}$ 满足式(1)时的熵最大^[20]。

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{G} \mathbf{A}_1^T \tag{1}$$

式中 $\mathbf{A}_1$ 为均值矩阵 $\mathbf{A}_m$ 通过 Cholesky 分解得到的下三角矩阵, $\mathbf{G}$ 为随机矩阵,满足 $\mathbf{G} = \mathbf{H} \mathbf{H}^T$, $\mathbf{G}$ 的数学期望为单位矩阵,即 $\mathbf{E}(\mathbf{G}) = \mathbf{I}$ 。但这一关系式只是针对矩阵 $\mathbf{A}$ 的限定条件,并不是 $\mathbf{A}$ 中具体元素的限定条件,根据最大熵原理,各元素取值在满足上述关系的基础上,需要尽可能地分散,不偏向任何一种假设分布,使 $\mathbf{A}$ 的熵最大。随机矩阵 $\mathbf{H}$ 的对角元素 H_{ii} 满足如下关系:

$$H_{ii} = \left[\frac{2 \cdot \Gamma\left(\frac{n-i+2\lambda_A}{2} - 1\right)}{n+2\lambda_A-1} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

式中 n 为随机矩阵 $\mathbf{H}$ 的维数; $\Gamma[(n-i+2\lambda_A)/2-1]$ 表示参数为 $(n-i+2\lambda_A)/2-1$ 的 Γ 函数; λ_A 为随机矩阵 $\mathbf{H}$ 统计分布的参数, 在已知随机矩阵 $\mathbf{A}$ 散度参数 δ_A 的前提下, λ_A 可通过如下关系来确定:

$$\lambda_A = \frac{1 - \delta_A^2(n-1) + \frac{(\text{tr}\mathbf{A})^2}{\text{tr}\mathbf{A}^2}}{2\delta_A^2} \quad (3)$$

随机矩阵 $\mathbf{H}$ 的非对角元素 $H_{ij} (i \neq j)$ 为高斯随机变量, 其均值 $E(H_{ij}) = 0$, 方差满足如下关系:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n + 2\lambda_A - 1} \quad (4)$$

式(1)~式(4)共同构成了最大熵随机对称矩阵的生成方法, 对于简单的不确定性转子系统, 通过这种方法可以顺利构造出系统的最大熵随机对称质量矩阵 $\mathbf{M}$ 、刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 及阻尼矩阵 $\mathbf{C}$, 并可得到与 $\mathbf{M}$ 相关的随机陀螺矩阵 $\mathbf{J}$ 。而由式(1)~式(4)可知, 构造这些随机矩阵需要首先确定其对应的相互独立的散度参数 δ_M 、 δ_C 及 δ_K , 将不考虑模型不确定时的随机矩阵记为 $\mathbf{A}^p$, 这些散度参数与 $\mathbf{A}^p$ 及对应的均值矩阵 $\mathbf{A}_m$ 有关, 且满足如下关系^[21]:

$$\delta_A = \left[\frac{(n+1)\sigma_A}{\text{tr}\mathbf{A}_m^2 + (\text{tr}\mathbf{A}_m)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

式中 $\sigma_A = E\{\text{tr}[(\mathbf{A}^p - \mathbf{A}_m)(\mathbf{A}^p - \mathbf{A}_m)^T]\}$, 为不考虑模型不确定性时 $\mathbf{A}^p$ 的散度参数。引入参数 W_A^p

$$W_A^p = E\{\text{tr}[(\mathbf{A}^p - \mathbf{A}_m)^2]\} = E\{\text{tr}[(\mathbf{G}_A^p - \mathbf{I})\mathbf{A}_1]^2\} \quad (6)$$

式中 $\mathbf{G}_A^p$ 可表示为

$$\mathbf{G}_A^p = (1 + \epsilon)\mathbf{I} \quad (7)$$

式中 $|\epsilon| \ll 1$, 为中心随机变量, 表示弹性模量、支承阻尼等参数的不确定性, 因此参数不确定随机矩阵 $\mathbf{A}^p = (1 + \epsilon)\mathbf{A}_m$, 结合式(5)~式(7)可得出 $\mathbf{A}_m$ 对应的散度参数 δ_A 和 σ_A 。

在较为复杂的转子动力学系统中, 可能会存在不对称矩阵, 比如转子系统刚度矩阵中的支承刚度矩阵。为了利用式(1)~式(4)所述的方法构造不对称随机矩阵 $\mathbf{B}$, 需要对 $\mathbf{B}$ 进行如下变形:

$$\mathbf{B} = \mathbf{QD} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{D}$ 为随机对称正定矩阵, 与式(1)中的随机矩阵 $\mathbf{A}$ 具有相同的性质; $\mathbf{Q}$ 为酉矩阵。因此对于任意的随机不对称或不正定矩阵 $\mathbf{B}$, 能够确定对称正定矩阵 $\mathbf{D}$ 时, 可通过如下关系进一步确定酉矩阵 $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{BD}^{-1} \quad (9)$$

为了得到随机对称正定矩阵 $\mathbf{D}$, 对式(8)做如下恒等变换:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = (\mathbf{QD})^T \mathbf{QD} = \mathbf{D}^2 \quad (10)$$

矩阵 $\mathbf{D}$ 的正定性决定了 $\mathbf{D}^2$ 的正定性, 因此矩阵 $\mathbf{D}^2$ 可以对角化, 通过矩阵 $\mathbf{D}^2$ 的特征根和特征向量可得到矩阵 $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \mathbf{PAP}^{-1} \quad (11)$$

式中 $\mathbf{A}$ 为矩阵 $\mathbf{D}^2$ 特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的平方根组成的对角阵, 即 $\mathbf{A}^2 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$; $\mathbf{P}$ 由 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 所对应特征向量组成。

1.2 转子系统不确定动力学模型

图1所示为某双圆盘转子系统模型示意图, 转子系统在 A 、 B 两处存在弹性支承, 转轴弹性模量为 E , 直径为 d , 弹性轴上两圆盘质量分别为 m_1 和 m_2 , 半径分别为 r_1 和 r_2 , 偏心距分别为 e_1 和 e_2 , 两圆盘偏心相位角分别为 ϕ_1 和 ϕ_2 。

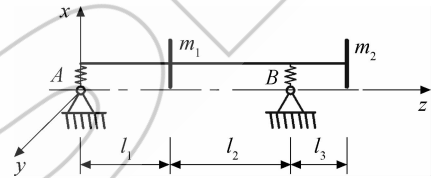


图1 简单双圆盘转子系统示意图

Fig. 1 Diagram for simple double disk rotor system

转子振动系统的均值动力学模型为

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{u}}_m - i\Omega \mathbf{J}_m \dot{\mathbf{u}}_m + \mathbf{C}_m \dot{\mathbf{u}}_m + \mathbf{K}_m \mathbf{u}_m = \mathbf{F}_m \quad (12)$$

转子振动系统的不确定性动力学模型为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} - i\Omega \mathbf{J}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (13)$$

根据前面所述的最大熵随机矩阵构造方法可知, 式(13)中随机矩阵 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{J}$ 、 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{K}$ 的数学期望分别为均值矩阵 $\mathbf{M}_m$ 、 $\mathbf{J}_m$ 、 $\mathbf{C}_m$ 和 $\mathbf{K}_m$ 。 $\mathbf{u}_m$ 和 $\mathbf{u}$ 分别为均值动力学模型及不确定性动力学模型的状态向量, $\mathbf{u} = [x_1, \theta_{y1}, x_2, \theta_{y2}]^T + i[y_1, -\theta_{x1}, y_2, -\theta_{x2}]^T$ 。均值刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{K}_{m,1} + \mathbf{K}_{m,2} \quad (14)$$

式中 $\mathbf{K}_{m,1}$ 为转轴均值刚度矩阵, $\mathbf{K}_{m,2}$ 为支承均值刚度矩阵。式(12)中的均值阻尼矩阵 $\mathbf{C}_m$ 由两部分组成

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_{m,1} + \mathbf{C}_{m,2} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{C}_{m,1}$ 为支承阻尼矩阵, $\mathbf{C}_{m,2}$ 根据文献[22]中提出的比例阻尼法进行计算

$$\mathbf{C}_{m,2} = \alpha \mathbf{M}_m + \beta \mathbf{K}_{m,1} \quad (16)$$

式中 α 和 β 为比例系数, 且满足如下关系:

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2(\omega_1\xi_2 - \omega_2\xi_1)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad (17)$$

$$\beta = \frac{2(\omega_1 \xi_1 - \omega_2 \xi_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \tag{18}$$

式中 ω_1 和 ω_2 分别为系统的 1 阶和 2 阶固有频率, ξ_1 和 ξ_2 分别为系统的 1 阶和 2 阶模态阻尼比。式(13)中的随机合外力向量为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1(t) + \mathbf{F}_2(t) \tag{19}$$

式中 $\mathbf{F}_1(t)$ 为随机噪声激励, 可根据随机噪声理论进行模拟^[23]。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(t) = & \{h_1 \cos(\Omega_1 t + \sigma_1 W(t) + \varphi), 0, \\ & h_2 \cos(\Omega_2 t + \sigma_2 W(t) + \varphi), 0\}^T + \\ & i\{h_1 \sin(\Omega_1 t + \sigma_1 W(t) + \varphi), 0, \\ & h_2 \sin(\Omega_2 t + \sigma_2 W(t) + \varphi), 0\}^T \end{aligned} \tag{20}$$

式中 h_1 、 h_2 和 Ω_1 、 Ω_2 分别为 $\mathbf{F}_1(t)$ 的幅值和中心频率, $W(t)$ 为标准维纳过程, σ_1 、 σ_2 为随机扰动强度, φ 为一维随机变量, 在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布, 因此 $\mathbf{F}_1(t)$ 为一有界随机过程, 通过给定不同的幅值和中心频率, 可以对大气湍流及地面传振等进行模拟^[23]。式(19)中的 $\mathbf{F}_2(t)$ 为圆盘偏心引起的不平衡激励力

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2(t) = & \Omega^2 \{m_1 e_1 \cos(\Omega t + \phi_1), 0, \\ & m_2 e_2 \cos(\Omega t + \phi_2), 0\}^T + \\ & i\Omega^2 \{m_1 e_1 \sin(\Omega t + \phi_1), 0, \\ & m_2 e_2 \sin(\Omega t + \phi_2), 0\}^T \end{aligned} \tag{21}$$

2 转子系统动力学特性分析

2.1 固有频率分析

图 1 所述双圆盘转子系统物理模型的具体参数如表 1 所示。

表 1 转子系统具体物理参数

Table 1 Detailed parameters of the rotor system

参数	数值
转轴弹性模量 $E/10^{11}(\text{N/m}^2)$	2.06
转轴轴段长 l_1/m	0.4
转轴轴段长 l_2/m	0.6
转轴轴段长 l_3/m	0.3
转轴直径 d/m	0.05
圆盘质量 $m_1, m_2/\text{kg}$	90, 100
圆盘半径 $r_1, r_2/\text{m}$	0.4, 0.5
支承弹性系数 $k_A, k_B/10^8(\text{N/m})$	3, 3
模态阻尼比 ξ_1, ξ_2	0.03, 0.02
弹性模量变异系数 $C_{ov,E}$	0.04~0.12
支承刚度变异系数 $C_{ov,k}$	0.04~0.12

利用表 1 中所给定的参数, 分别根据均值动力学模型以及非参数不确定性动力学模型得到转子的进动频率 ω 随转速 Ω 的变化关系; 为了分析系统中两种不确定性的贡献度, 需要在同一不确定性水平下考虑参数的不确定性, 根据文中第 1.1 节中对随机矩阵 $\mathbf{A}$ 的散度参数 δ_M 、 δ_C 及 δ_K 的描述可知, 参数不确定动力学模型中的散度参数 σ_M 、 σ_C 及 σ_K 分别与 δ_M 、 δ_C 及 δ_K 一一对应。为了研究转子系统刚度参数不确定性与模型不确定性对固有频率的影响, 拟分别在考虑刚度的模型不确定性前后对固有频率进行计算, 并分析两种不确定性对固有频率的影响大小。

利用式(12)所描述的均值模型动力学方程对应的齐次方程可计算得到进动角速度 ω 随转子转速 Ω 的变化关系; 利用文中第 1.1 节的随机矩阵构造方法分别建立随机质量矩阵、随机刚度矩阵和随机阻尼矩阵, 结合式(13)所对应的齐次方程可预测非参数不确定性动力学模型进动角速度 ω 随 Ω 的变化关系; 采用文献[24]所提供的参数不确定动力学模型研究方法同样可对 ω - Ω 变化关系进行预测。图 2 为考虑由转轴弹性模量不同变异性(弹性模量的变异系数 $C_{ov,E}$ 分别为 0.04、0.08、0.12, 根据概率论的描述, 变异系数为标准差与平均值的比, 所反映的是参数离散程度的大小, 变异系数越大, 则离散程度越大。此处 $C_{ov,E}$ 值越大表示弹性模量离散程度越大, 反之则表示离散程度较小; 特别地: 当 $C_{ov,E}=0$ 时表示不具有变异性, 即弹性模量为常量。)引起的系统刚度参数不确定性时的 ω - Ω 变化关系、同时考虑刚度模型与参数不确定性时的 Ω - ω 曲线以及均值模型 Ω - ω 曲线图。其中, 刚度的模型不确定性由动力学模型的建模误差所引起, 具体指的是: 在对转轴进行动力学建模阶段, 为了应用挠曲变形理论而作平面假设时所产生的模型不确定性。而刚度的参数不确定性具体则由工作温度等工况的变化所引起, Soize^[25] 在研究结构动力学非参数不确定建模方法时, 也采用了类似的描述。表 1 及图 2 中变异系数 $C_{ov,E}$ 的各个不同取值均为假定量。

图 2 结果表明, ω 随 Ω 变化曲线与直线 $\omega=\Omega$ 及直线 $\omega=-\Omega$ 的交点数分别为 2 和 4, 表明转子系统存在两个正进动临界转速和 4 个反进动临界转速, 而实际上由于不平衡激励作用的影响, 转子系统通常表现为正进动。图 2 中, 均值模型所得曲线是确定的, 且与直线 $\omega=\Omega$ 的交点表示转子

系统 1 阶与 2 阶正进动固有频率,分别为 $\omega_1 = 162.01 \text{ rad/s}$ 与 $\omega_2 = 364.14 \text{ rad/s}$ 。但由于系统刚度不确定性的存在,会使其固有频率在一定范围内产生波动。由图 2(a)可知,非参数与参数不确定性动力学模型所预测的 1 阶固有频率分别在 $153.96 \sim 169.40 \text{ rad/s}$ 及 $156.90 \sim 168.51 \text{ rad/s}$ 范围内波动,其相对于均值模型的波动偏差分别为 4.77% 及 3.58% ;2 阶正进动固有频率的变化范围分别为 $349.88 \sim 389.66 \text{ rad/s}$ 及 $353.71 \sim 380.25 \text{ rad/s}$,由不确定性所引起的波动偏差分别

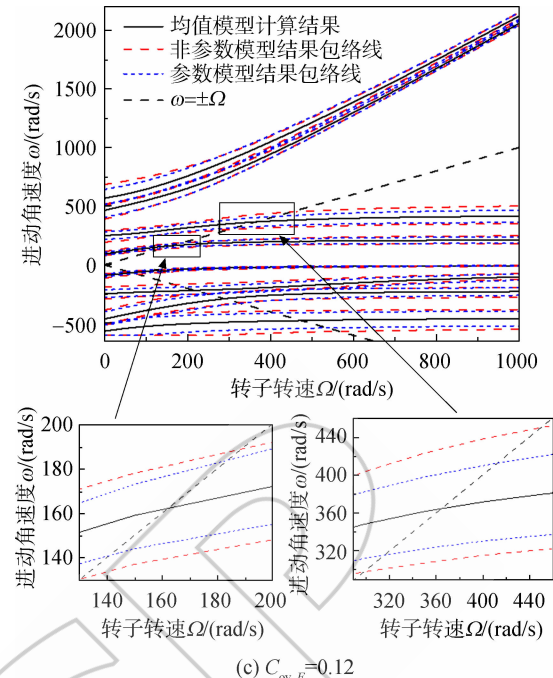
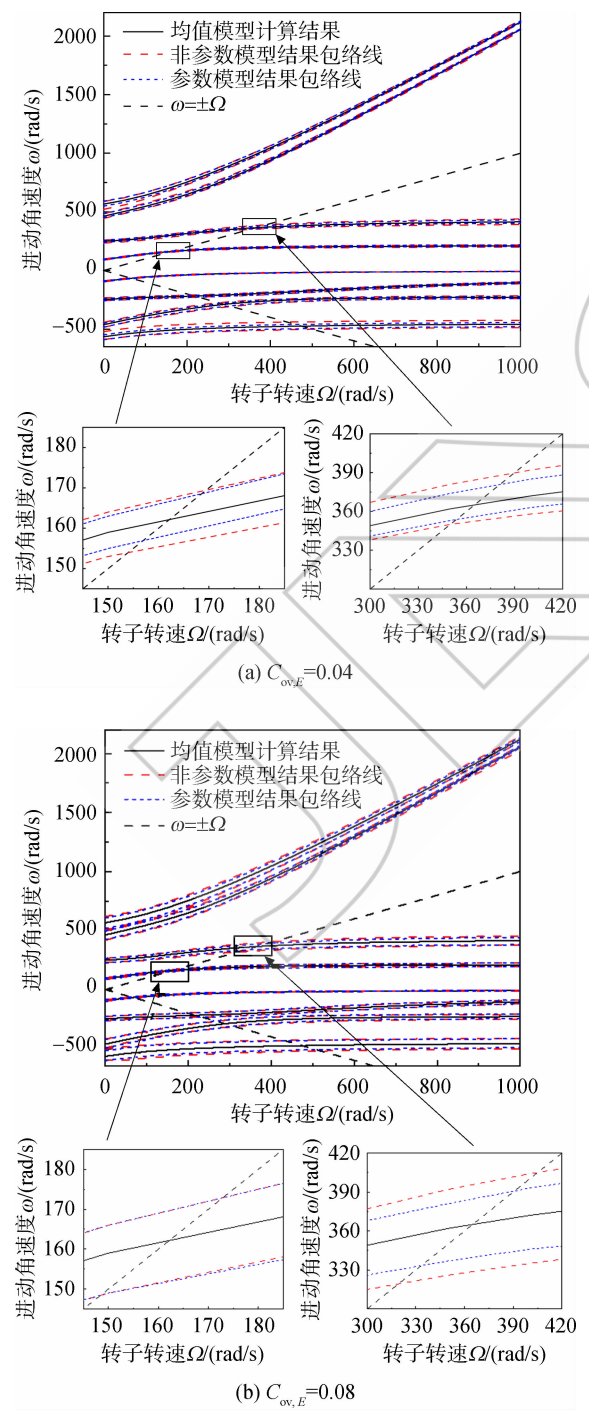


图 2 转子转速 Ω 为 0~1000 rad/s 时的进动角速度 ω
Fig.2 Whirl speed ω for rotational speed Ω from 0 to 1000 rad/s

为 5.46% 及 3.64% 。两种不确定性动力学模型对转子系统 1 阶及 2 阶固有频率范围的预测结果有所不同,且非参数不确定动力学模型所预测的范围更大,这是因为采取参数不确定动力学模型进行预测时无法将模型不确定性所产生的影响考虑在内。由此可进一步得出如下结论:系统参数不确定性与模型不确定性使 1 阶固有频率分别产生了 3.58% 与 1.19% 的波动;使 2 阶固有频率分别产生了 3.64% 及 1.82% 的波动。图 2(b)两种不确定性使 1 阶、2 阶固有频率分别产生了 7.56% 及 0.12% 、 7.78% 及 3.92% 的波动;图 2(c)两种不确定性使 1 阶、2 阶固有频率分别产生了 13.23% 及 4.73% 、 13.32% 及 7.28% 的波动。Capiez-Lernout 等^[24]在对复杂航天器进行不确定结构动力学研究时也有类似的结论。

采用同样的方法可对比分析支承参数与模型不确定性对系统固有频率的影响。通常在判断系统稳定性时会考虑支承阻尼的影响,对这一情况暂不做分析,只针对支承刚度不确定性的作用进行分析。图 3 为不同刚度变异性引起的参数不确定性及其所对应的模型不确定性情况下的 $\Omega-\omega$ 曲线。其中,支承刚度的模型不确定性是由动力学模型建模误差引起的,具体表现为:在支承处简化处理为支承刚度参数时产生的模型不确定性。而支承刚度的参数不确定性与前面转轴刚度的参

数不确定性类似,由工作温度等工况的变化所引起。

图3表明,不同支承刚度变异系数 $C_{ov,k}$ (与转轴刚度的变异系数类似,为支承刚度标准差与其平均值的比,反映支承刚度的离散程度。表1及图3中变异系数 $C_{ov,k}$ 的各个不同取值均为假定量)情况下系统1阶、2阶固有频率波动范围有所差别: $C_{ov,k}$ 越大,两种不确定模型的1阶、2阶固有频率变化范围均增大,且受参数不确定性影响更大,主要原因是支承刚度接近于或小于转轴刚度,这在文献[26]中也有类似的描述。

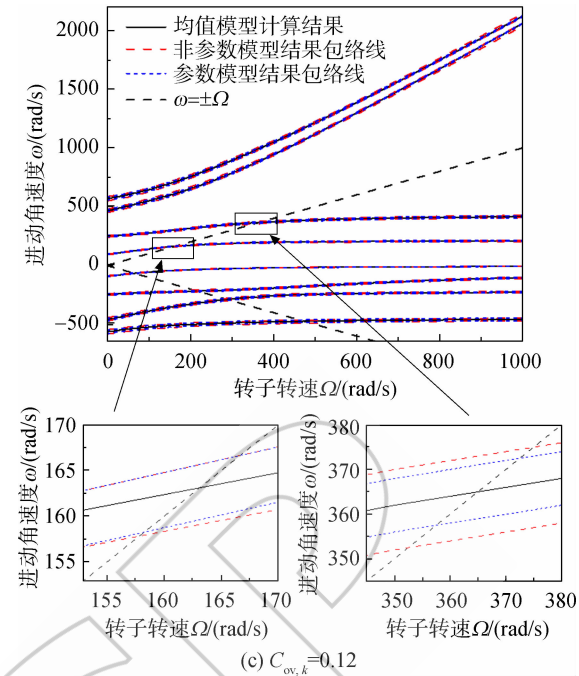
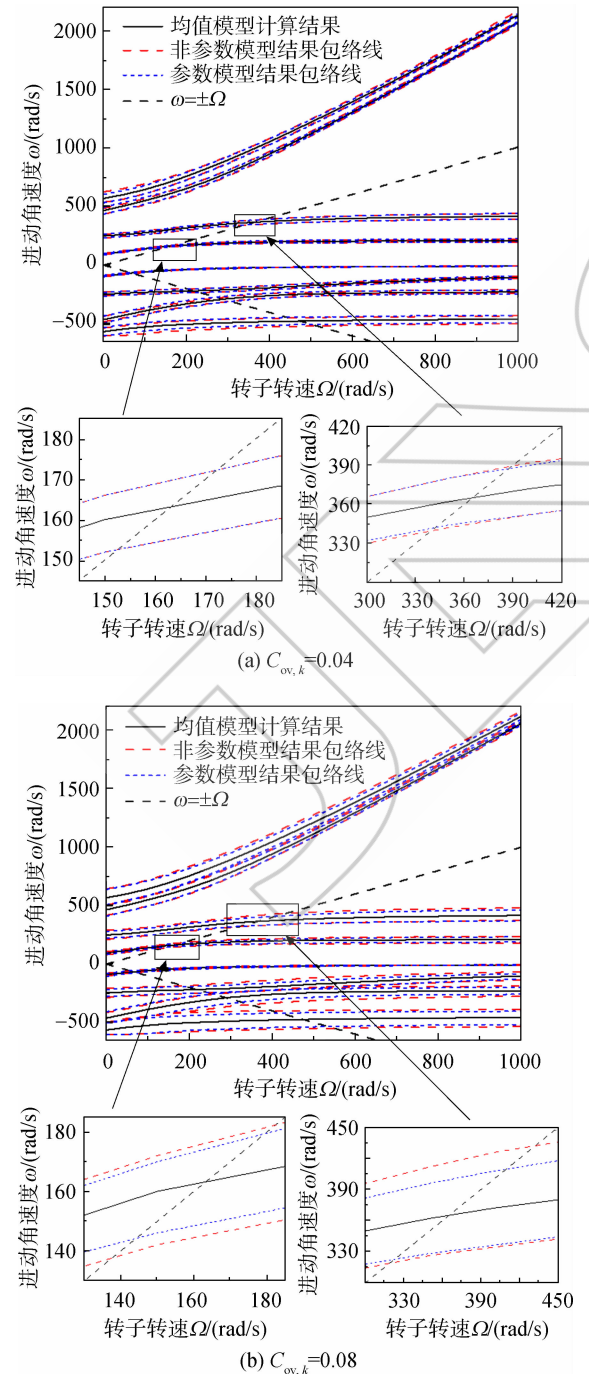


图3 支承刚度不确定且 Ω 为0~1000 rad/s时的进动角速度 ω
Fig. 3 Whirl speed ω for rotational speed Ω from 0 to 1000 rad/s with stiffness uncertainties

2.2 转子系统的振动响应预测

为了进一步明确非参数方法在不确定转子系统振动分析中的有效性,对图1所示双圆盘转子系统进行振动响应分析,以便对同时存在模型不确定性及参数不确定性的系统振动响应进行合理地预测。假定两个圆盘均存在一定程度的偏心,偏心距分别为 $e_1 = 3.0 \times 10^{-5}$ m和 $e_2 = 2.0 \times 10^{-5}$ m,相位角分别为 $\phi_1 = \pi/4$ 和 $\phi_2 = \pi/3$ 。有界随机激励的各项参数分别为: $h_1 = h_2 = 0.002$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.8$ 。将圆盘1和圆盘2所对应位置分别记为响应观测点1和2,分别采用非参数与参数不确定性动力学模型进行40次模拟计算,并分别与均值动力学模型计算结果进行比较。图4为考虑不同转轴弹性模量变异性($C_{ov,E} = 0.04, 0.08, 0.12$)引起的参数不确定性及其对应模型不确定性时,采用两种不确定动力学模型对观测点1和2处的响应幅值计算结果。

由图4可知,采用两种不确定性动力学模型所得到的观测点1和2的振动响应预测结果与均值动力学模型相比,均有一定程度的波动,这是由系统的不确定性所造成的;当 $C_{ov,E}$ 为0.04时,在0~600 rad/s范围内,非参数不确定性动力学模型在两观测点处的响应预测结果波动范围与参数不确定性动力学模型几乎重合,且波动范围均较

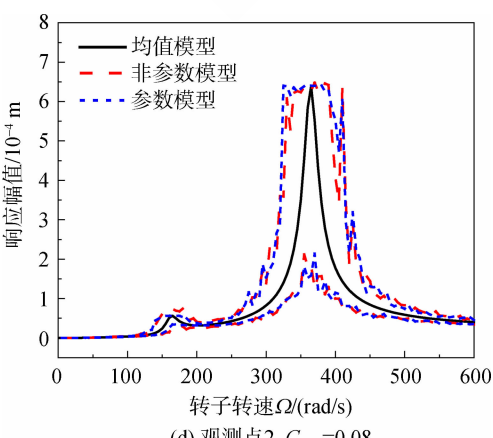
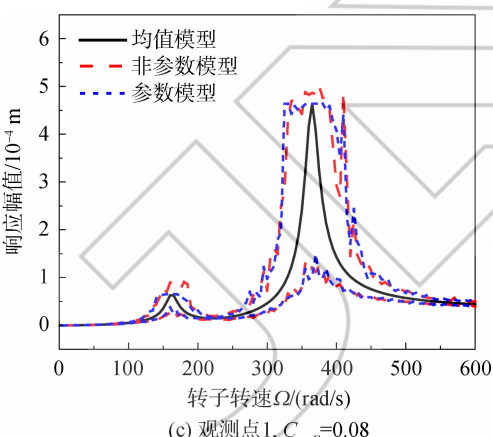
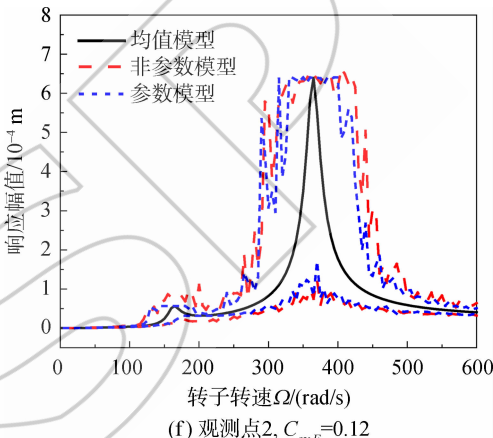
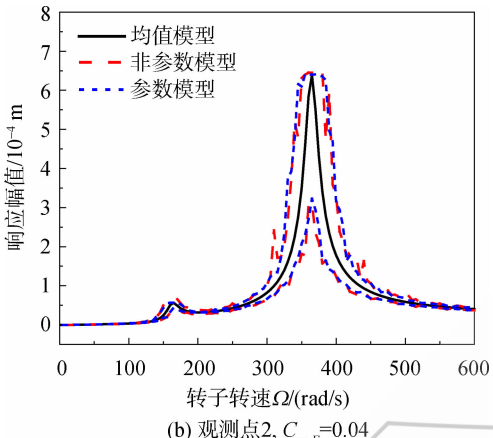
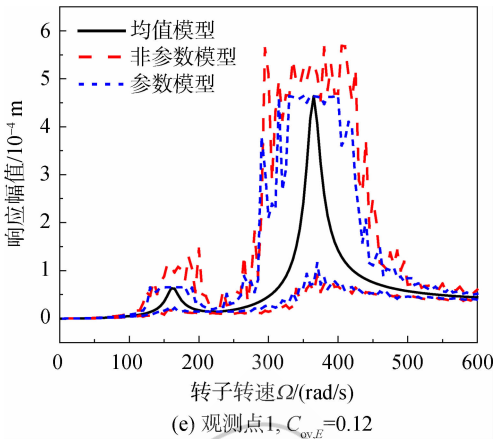
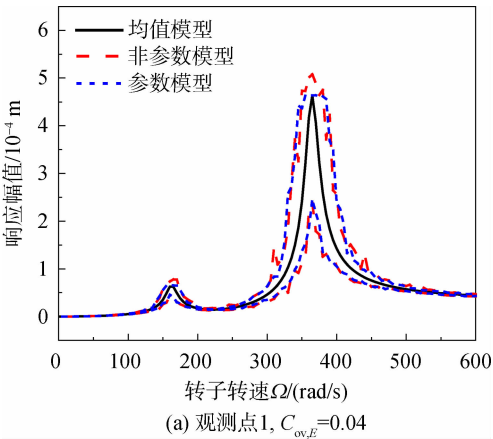


图 4 不确定性转子系统的振动响应
Fig. 4 Vibration response of rotor system with uncertainties

窄,这表明两种不确定性对响应的影响均较小; $C_{ov,E}$ 为 0.08 及 0.12 时,在 300~400 rad/s 范围内波动较明显,表明在系统 2 阶固有频率附近不确定性的影响更大;非参数模型结果并不完全包络参数模型,这是由于非参数动力学模型中两种不确定性分别在相反方向上影响了两观测点的振动响应。对于观测点 1, $C_{ov,E}=0.04$ 时非参数与参数不确定性动力学模型在 0~120 rad/s 范围内的振动响应预测结果分别在 $6.86 \times 10^{-9} \sim 1.18 \times 10^{-5}$ m 及 $7.65 \times 10^{-9} \sim 1.07 \times 10^{-5}$ m 之间波动,相对于均值模型的波动偏差分别从 13.85% 及 8.10% ($\Omega=5$ rad/s) 增大到 21.29% 及 9.96% ($\Omega=120$ rad/s),进而表明在这一转速范围内模型不确定性对系统响应波动的影响从 5.75% 增大到了 11.33%;在 120~200 rad/s 范围内两不确定性动力学模型的振动响应预测结果分别在 $1.18 \times 10^{-5} \sim 2.15 \times 10^{-5}$ m 及 $1.07 \times 10^{-5} \sim 1.99 \times 10^{-5}$ m 之间波动,波动偏差分别先增大到 31.95% 及 25.36% ($\Omega=180$ rad/s),随后

减小至 20.06% 及 11.16% ($\Omega=200\text{ rad/s}$), 进一步表明在这一转速范围内, 模型不确定性对系统响应波动的影响减小到 6.59% 后又增至 8.90%。根据对 0~200 rad/s 范围内两种的振动响应预测结果的分析可知, 随着 Ω 向固有频率的靠近, 由参数不确定性所产生的响应波动呈迅速增大趋势, 而模型不确定性的影响变化并不明显, 其原因是在固有频率附近参数不确定性起主要作用。 $\Omega>500\text{ rad/s}$ 时, 两不确定模型结果包络线变窄并趋于重合, 主要是因为参数不确定性的影响迅速减小至 6.93% 以下。

2.3 不确定性振动响应的置信域

通过以上对不确定性转子系统的响应振动分析可知, 系统的不确定性在不同转速情况下的影响大小不同, 且在同一转速情况下两种不确定性的影响大小也不同。因此, 为了判断非参数与参数不确定性动力学模型对模型不确定性及参数不确定性的敏感性, 需要对不同转速情况下的预测结果进行置信度计算, 图 5 为 $C_{ov,E}=0.08$ 时 0~600 rad/s 转速范围内的概率水平为 95% 的置信度所对应区域(置信域)计算结果。

图 5 所示置信域计算结果显示, 在 0~120 rad/s、200~270 rad/s 以及大于 430 rad/s 转速范围内, 两观测点处由非参数与参数不确定性动力学模型得到的预测结果置信域均较窄, 且集中于均值动力学模型振动响应附近, 表明在这些范围内非参数动力学模型对模型不确定性及参数不确定性均不敏感; 在 120~200 rad/s 及 270~430 rad/s 两个范围内置信域变宽, 且非参数不确定性模型所对应的置信域宽度与参数不确定性模型相比明显增大, 表明在靠近固有频率的范围内, 非参数不确定性动力学模型对模型不确定性比参数不确定性更敏感。这进一步表明, 采用基于最大

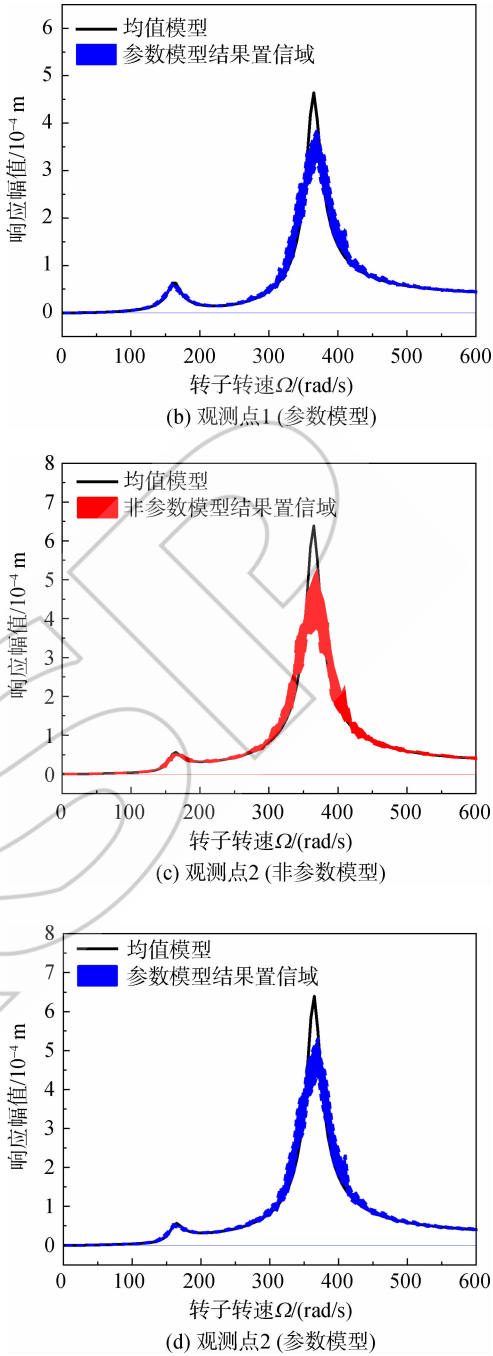
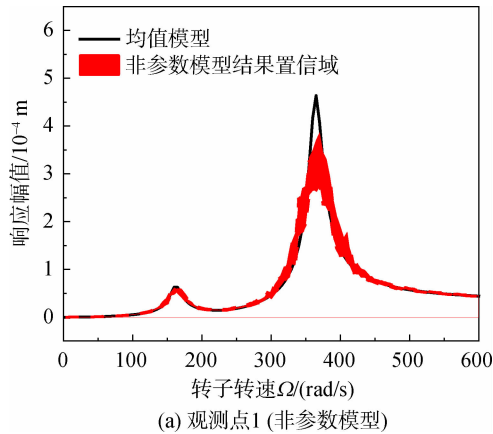


图 5 振动响应预测结果的置信域
Fig. 5 Confidence region of prediction results of vibration responses

熵原理构造随机矩阵的非参数方法适合于不确定性转子系统的随机振动预测。

3 结 论

- 1) 根据随机矩阵理论能够对具有模型不确定及参数不确定的转子系统质量矩阵、刚度矩阵、阻尼矩阵以及陀螺矩阵进行动力学建模。
- 2) 在同等不确定性水平下, 模型不确定性与参数不确定性对 1 阶、2 阶固有频率波动的贡献

度不同;不确定弹性模量($C_{ov,E}=0.04$)引起的转轴刚度参数不确定性使 1 阶、2 阶固有频率产生的波动为 3.58%、3.64%,而模型不确定性引起的波动为 1.19%、1.82%;模型不确定性对系统 1 阶、2 阶固有频率波动的贡献度小于参数不确定性。固有频率对支承刚度参数不确定的敏感性大于模型不确定性。

3) 转子转速远离固有频率时,非参数不确定性动力学模型的振动响应对模型不确定性与参数不确定性均不敏感;在固有频率附近,对模型不确定性比对参数不确定性更敏感。

参考文献:

- [1] 王存. 基于切比雪夫多项式展开的转子动力特性区间分析[J]. 航空动力学报, 2020, 35(4): 757-765.
WANG Cun. Interval analysis of rotor dynamic characteristics based on Chebyshev polynomials expansion[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(4): 757-765. (in Chinese)
- [2] LIU Shuguo, WANG Jun, HONG Jie, et al. Dynamics design of the aero-engine rotor joint structures based on experimental and numerical study[C]// Proceedings of ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea and Air. Glasgow, UK: ASME, 2010: 49-60.
- [3] 郝勇, 陈萌, 洪杰, 等. 基于泰勒展开法的转子系统动力特性区间分析方法[J]. 航空动力学报, 2014, 29(3): 571-577.
HAO Yong, CHEN Meng, HONG Jie, et al. Interval analysis method of rotordynamics based on Taylor expansion method[J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(3): 571-577. (in Chinese)
- [4] SOIZE C. Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics: recent theoretical advances[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(10): 2379-2395.
- [5] CAPILLON R, DESCELIERS C, SOIZE C. Uncertainty quantification in computational linear structural dynamics for viscoelastic composite structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 305(15): 154-172.
- [6] 游震洲, 黄其祥, 王锋, 等. 转子-基础系统的随机不确定建模与振动分析[J]. 航空动力学报, 2016, 31(1): 1-9.
YOU Zhenzhou, HUANG Qixiang, WANG Feng, et al. Random uncertainty modeling and vibration analysis of rotor-foundation system[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(1): 1-9. (in Chinese)
- [7] ALI Y, MAHMOOD H S. Development and comparison of two new methods for quantifying uncertainty in analysis of flow through rockfill structures[J]. Iranian Journal of Science and Technology: Transactions of Civil Engineering, 2018, 43(9): 277-288.
- [8] DIMENTBERG M F. Vibration of a rotating shaft with randomly varying internal damping[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 285(3): 759-765.
- [9] 傅超, 任兴民, 杨永锋, 等. 正交多项式在不确定转子动态响应计算中的应用及对比分析[J]. 航空动力学报, 2018, 33(9): 2228-2234.
FU Chao, REN Xingmin, YANG Yongfeng, et al. Application and comparative analysis of orthogonal polynomials in uncertain rotor dynamic response calculation[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(9): 2228-2234. (in Chinese)
- [10] DAOUK S, LOUF F, DORIVAL O, et al. Uncertainties in structural dynamics: overview and comparative analysis of methods[J]. Mechanics and Industry, 2015, 16(4): 404.
- [11] GAN C B, WANG Y H, YANG S X, et al. Nonparametric modeling and vibration analysis of uncertain Jeffcott rotor with disc offset[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2014, 78(1): 126-134.
- [12] MURTHY R, TOMEI J C, WANG X Q, et al. Nonparametric stochastic modeling of structural uncertainty in rotor dynamics: unbalance and balancing aspects[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2014, 136(6): 1-12.
- [13] GAN C B, WANG Y H, YANG S X. Nonparametric modeling on random uncertainty and reliability analysis of a dual-span rotor[J]. Journal of Zhejiang University: Science A (Applied Physics and Engineering), 2018, 19(3): 189-202.
- [14] CAPILLON R, DESCELIERS C, SOIZE C. Model uncertainties in computational viscoelastic linear structural dynamics[J]. Procedia Engineering, 2017, 199(9): 1210-1215.
- [15] OHAYON R, SOIZE C. Advanced computational vibro-acoustics: reduced-order models and uncertainty quantification[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2014.
- [16] SOIZE C. Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2001, 109(5): 1979-1996.
- [17] MIGNOLET M P, SOIZE C. Stochastic reduced order models for uncertain geometrically nonlinear dynamical systems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197(45/46/47/48): 3951-3963.
- [18] SONG P C, MIGNOLET M P. Reduced order model based uncertainty modeling of structures with localized response[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2018, 51(1): 42-55.
- [19] CELAREC D, DOLSEK M. The impact of modeling uncertainties on the seismic performance assessment of reinforced concrete frame buildings[J]. Engineering Structures, 2013, 52(7): 340-354.
- [20] MIGNOLET M P, SOIZE C. Nonparametric stochastic modeling of linear systems with prescribed variance of several natural frequencies[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2008, 23(2/3): 267-278.
- [21] CAPIEZ-LERNOUT E, SOIZE C. Nonparametric model-

ing of random uncertainties for dynamic response of mis-tuned bladed disks[J]. Journal of Engineering for Gas Tur-bines and Power,2004,126(11):610-618.

[22] MA H,LI H,NIU H,et al. Nonlinear dynamic analysis of a rotor-bearing-seal system under two loading conditions [J]. Journal of Sound and Vibration,2013,332 (23):6128-6154.

[23] 戎海武,王向东,黄勇,等. 有界随机噪声激励下碰撞系统的稳定性[J]. 应用力学学报,2015,32(5):750-755.
RONG Haiwu,WANG Xiangdong,HUANG Yong,et al. Stability of a single-degree-of-freedom linear vibriom-pact system under boundary random noise excitation[J]. Chi-nese Journal of Applied Mechanics,2015,32(5):750-755. (in Chinese)

[24] CAPIEZ-LERNOUT E, PELLISSETTI M, PRADL-WARTER H,et al. Data and model uncertainties in com-plex aerospace engineering systems[J]. Journal of Sound and Vibration,2006,295(8):923-938.

[25] SOIZE C. Uncertainty quantification in computational structural dynamics and vibroacoustics[M]. Berlin:Spring-er International Publishing,2017.

[26] 钟一谔,何衍宗,王正,等. 转子动力学[M]. 北京:清华大-学出版社,1987.

(编辑:王碧琚)